

Tema 5: Dinámica de la partícula

FÍSICA XERAL I

GRAO EN FÍSICA



- 1 Introducción
- 2 Leyes de Newton del movimiento
- 3 Momento lineal. Teorema de conservación
- 4 Momento angular. Teorema de conservación
- 5 Trabajo y energía mecánica. Teorema de conservación
- 6 Rozamiento

1. Introducción.

La **dinámica** es la parte de la Física que estudia la relación entre el movimiento de los cuerpos y las fuerzas que lo causan.

Junto con los conceptos cinemáticos de desplazamiento, velocidad y aceleración utilizaremos otros dos nuevos, *masa* y *fuerza*, para analizar los principios de la dinámica.

En principio definiremos la **masa** como *una magnitud característica de la cantidad y naturaleza de la materia*. Definida así, la masa es una propiedad intrínseca de la materia (**masa inercial**). La unidad de masa en el SI es el kilogramo, Kg.

Definimos la **fuerza** como *toda causa capaz de modificar el estado de reposo o movimiento de los cuerpos, o de producir en ellos estados de tensiones o deformaciones*. La unidad de fuerza en el SI es el newton, N.

Si el cuerpo sobre el que actúan las fuerzas es deformable, entonces las fuerzas deben ser consideradas como vectores ligados.

Sin embargo, si el cuerpo es rígido podremos considerar a las fuerzas como vectores deslizantes.

¿Cuántos tipos distintos de fuerzas hay?

Todas las fuerzas son expresiones de cuatro tipos de interacciones *fundamentales* entre las partículas, con las que la ciencia trata de explicar el comportamiento de la materia: **gravitacional**, **electromagnética**, **nuclear fuerte** y **nuclear débil**.

La interacción gravitacional es atractiva y aparece entre los cuerpos con masa; la electromagnética es la que aparece entre partículas con carga eléctrica en reposo o movimiento; la nuclear fuerte es la que mantiene unido el núcleo de un átomo; la nuclear débil actúa entre partículas elementales y regula la desintegración β .

El alcance de las fuerzas gravitacionales y electromagnéticas es infinito y su módulo varía de forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. La nuclear fuerte sólo está presente dentro del núcleo y su alcance es del tamaño de éste, aproximadamente 10^{-15} m, la nuclear débil tiene un alcance aún menor, de unos 10^{-16} m.

En cuanto a su intensidad, la de mayor valor es la nuclear fuerte y tomándola como referencia, la electromagnética tendría un valor 10^{-2} de la de aquel; la nuclear débil, 10^{-5} , y la gravitacional, 10^{-38} .

En la actualidad hechos experimentales confirman que tanto la fuerza electromagnética como la nuclear débil pueden ser explicadas en base a una fuerza unificada denominada **electrodébil**.

2. Leyes de Newton del movimiento.

Todo el desarrollo de la dinámica está basado en tres leyes fundamentales que rigen el movimiento de un punto material y que se conocen como *leyes de Newton*.

- **Primera ley de Newton o ley de la inercia**

Toda punto material sobre el que no actúa fuerza neta alguna conserva su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme en que se encuentre.

Si la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nula, $\vec{F} = 0$, ésta no adquiere aceleración, $\vec{a} = 0$ y, por tanto, su velocidad debe permanecer constante $\vec{v} = cte$. Si inicialmente estaba en reposo, $\vec{v}_0 = 0$, seguirá en reposo, y si estaba moviéndose con cierta velocidad, $\vec{v} = \vec{v}_0$, seguirá con ésta, es decir, con movimiento rectilíneo uniforme. Todo cuerpo que se mueve de esta forma se denomina **cuerpo libre**.

- **Segunda ley de Newton o ley del movimiento**

Toda partícula sobre la que actúa una fuerza neta no nula, adquiere una aceleración, que tiene la misma dirección y sentido de aquella, y cuyo módulo es igual al cociente del módulo de la fuerza dividido por la masa de la partícula.

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (1)$$

La ecuación (1) permite relacionar las unidades de las tres magnitudes que intervienen en ella. Así en el SI

$$N = kg \frac{m}{s^2}$$

Observar que la cantidad $m\vec{a}$ no es una fuerza. La ecuación (1) sólo dice que el vector $m\vec{a}$ es igual en magnitud, dirección y sentido que la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

La segunda ley de Newton dada por (1) recibe el nombre de **ecuación del movimiento** ya que proporciona el valor instantáneo de la aceleración correspondiente al valor instantáneo de las fuerzas que se ejercen

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

de forma que la velocidad y la posición de la partícula pueden obtenerse por integración directa de la ecuación anterior si más que conocer las condiciones iniciales

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- Tercera ley de Newton o ley de la acción y reacción

Cuando dos cuerpos ejercen fuerzas entre sí, estas fuerzas son de intensidades iguales y sentidos opuestos

Esta ley puede enunciarse en sentido restringido añadiendo al enunciado anterior que dichas fuerzas se encuentran sobre una misma recta que une a ambos cuerpos.

Se debe resaltar que cada una de las fuerzas a las que se refiere la tercera ley de Newton actúa sobre cuerpos distintos.

Para medir las aceleraciones es necesario que elijamos un sistema de referencia adecuado.

El sistema de referencia fundamental para que se verifiquen las leyes de Newton es el denominado *sistema inercial primario* que hemos definido como un sistema de referencia fijo, de forma que la aceleración medida respecto de él es absoluta.

También sabemos que todo sistema de referencia que posea un movimiento de traslación uniforme respecto de uno fijo, proporciona la misma medida de la aceleración. A tales sistemas de referencia le denominaremos *inerciales*.

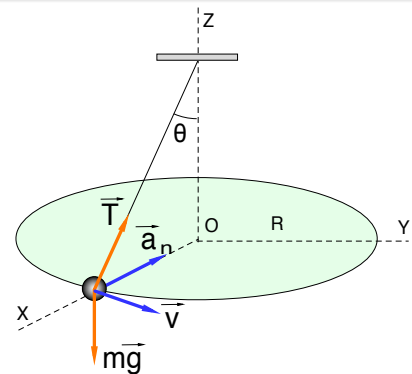
Las leyes de Newton serán válidas para cualquier sistema inercial.

Ejemplo 1

¿Cuál debe ser la velocidad, de módulo constante, de la masa de un péndulo cónico que describe una trayectoria circular de radio R para que su amplitud angular sea θ ?

Para mayor simplicidad, situemos en un instante dado un sistema de referencia fijo como se indica en la figura.

La únicas fuerzas que actúan sobre la masa m son su peso y la tensión de la cuerda.



Descompongamos estas fuerzas según los ejes fijos

$$\vec{T} = T(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k}), \quad m\vec{g} = -mg\vec{k}$$

La masa m describe una trayectoria circular de radio R con una velocidad lineal de módulo constante v ; por lo tanto, su aceleración estará dirigida hacia el centro de curvatura y su valor será

$$\vec{a}_n = -\frac{v^2}{R}\vec{i}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, resulta

$$T(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{k}) - mg\vec{k} = -m\frac{v^2}{R}\vec{i}$$

es decir

$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{R}, \quad T\cos\theta = mg$$

y finalmente

$$v = \sqrt{gR\operatorname{tg}\theta}$$

Si el sistema de referencia para el estudio de nuestro problema dinámico no es inercial, entonces no podremos aplicar directamente las leyes de Newton.

Si tenemos en cuenta que la aceleración absoluta puede escribirse como la suma de las aceleraciones relativa, la de arrastre y la complementaria

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_a + \vec{a}_c \quad (2)$$

al sustituir \vec{a} en la ecuación (1)

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}' + \vec{a}_a + \vec{a}_c)$$

que puede ponerse en forma más adecuada

$$\vec{F} - m\vec{a}_a - m\vec{a}_c = m\vec{a}' \quad (3)$$

donde $-m\vec{a}_a$ es la denominada **fuerza de inercia de arrastre** y $-m\vec{a}_c$ la **fuerza de inercia de complementaria**.

La ecuación (3) se interpreta diciendo que si queremos aplicar la segunda ley de Newton a un sistema no inercial, habrá que añadir a las fuerzas reales las fuerzas de inercia.

Las fuerzas de inercia son fuerzas ficticias o aparentes, que no son el resultado de la interacción con otros cuerpos y en consecuencia carecen de reacción.

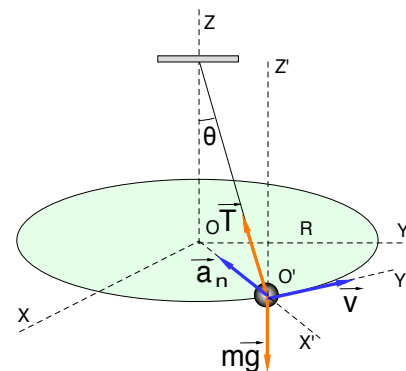
Ejemplo 2

Resolver el **Ejemplo 1** utilizando un sistema de referencia no inercial.

En la figura puede verse un sistema de referencia fijo con origen en O, y otro móvil con origen en O' que está ligado a la masa m. Los ejes Z y Z' son paralelos mientras que el eje X' pasa siempre por O siendo su sentido radial hacia afuera.

El origen O' describe una circunferencia de radio R de centro en O, con una velocidad constante v.

Las únicas fuerzas reales que actúan sobre la masa m son su peso y la tensión de la cuerda, que expresadas en el sistema de referencia móvil adoptan la forma



$$\vec{T} = T(-\sin\theta\vec{i}' + \cos\theta\vec{k}'), \quad m\vec{g} = -mg\vec{k}'$$

Por el hecho de haber situado la masa m fija en el origen de referencia móvil O' , $\vec{r}' = 0$, y en consecuencia $\vec{v}' = 0$ y $\vec{a}' = 0$.

Analicemos ahora las fuerzas de inercia:

Dado que la aceleración complementaria $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = 0$ resulta para la fuerza de inercia complementaria $-m\vec{a}_c = 0$.

Teniendo en cuenta que $\vec{r}' = 0$ y que la aceleración de arrastre viene dada por $\vec{a}_a = \vec{a}_{O'} + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$, ésta se reduce a $\vec{a}_a = \vec{a}_{O'}$.

Debido al movimiento de O' , su aceleración estará dirigida hacia el origen fijo O , siendo su valor $\vec{a}_{O'} = -\frac{v^2}{R}\vec{i}'$; por consiguiente, la fuerza de inercia de arrastre será $-m\vec{a}_a = m\frac{v^2}{R}\vec{i}'$.

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (3), obtenemos

$$T(-\sin\theta\vec{i}' + \cos\theta\vec{k}') - mg\vec{k}' + m\frac{v^2}{R}\vec{i}' = 0$$

Lo que equivale a

$$-T \sin\theta + m\frac{v^2}{R} = 0, \quad T \cos\theta - mg = 0$$

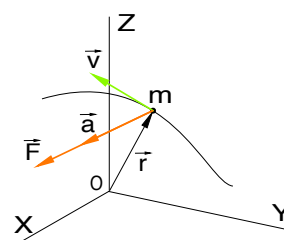
y por lo tanto

$$v = \sqrt{gR \operatorname{tg}\theta}$$

Sin embargo, dependiendo de la naturaleza del problema, y siempre que el error sea despreciable, podremos considerar unos ejes ligados a la superficie de la Tierra como inerciales para estudiar los movimientos de los cuerpos que tienen lugar sobre la superficie de la Tierra.

3. Momento lineal. Teorema de conservación.

Consideremos una partícula de masa m que se mueve a lo largo de una trayectoria bajo la acción de una fuerza neta \vec{F} . Sea \vec{v} la velocidad en un instante dado.



Se define **momento lineal** o **cantidad de movimiento** de una partícula al vector producto de su masa por su vector velocidad

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (4)$$

La unidad del momento lineal, que no tiene nombre especial, en el sistema SI es $kg \cdot m/s$.

Derivando la expresión (4) respecto al tiempo, suponiendo la masa constante, resulta

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

es decir

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (5)$$

la derivada respecto al tiempo del momento lineal de la partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella. Este resultado se conoce como **teorema del momento lineal**.

Debe tenerse en cuenta que para obtener la ecuación (5) hemos supuesto que la masa de la partícula permanece constante, por lo que dicho resultado no puede ser aplicado al estudio de problemas de masa variable.

Si en la ecuación (5) hacemos $\vec{F} = 0$

obtenemos el **teorema de conservación del momento lineal**

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = cte \quad (6)$$

si sobre la partícula no actúa fuerza neta alguna el momento lineal permanece constante.

El efecto de la fuerza neta \vec{F} sobre la cantidad de movimiento de la partícula durante un período de tiempo finito puede obtenerse integrando la ecuación (5) entre dos instantes t_1 y t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p}$$

Al producto de la fuerza por el tiempo durante el que está actuando se le denomina **impulso lineal**

$$\vec{I}_L = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad (7)$$

el impulso lineal recibido por la partícula es igual a la variación de su cantidad de movimiento.

Ejemplo 3

Un bate ejerce una fuerza horizontal $\vec{F} = (1,6 \cdot 10^7 t - 6,0 \cdot 10^9 t^2) \vec{i} \text{ N}$ sobre una pelota de 0,145 kg entre $t=0$ y $t=2,5$ ms. En $t=0$, la velocidad de la pelota es $-(40,0 \vec{i} + 5,0 \vec{j}) \text{ m/s}$. Calcular: a) el impulso del bate sobre la pelota en el intervalo de tiempo dado; b) el impulso ejercido por la gravedad en el mismo intervalo; c) la velocidad de la pelota en $t=2,5$ ms.

a) El impulso de la fuerza \vec{F} será

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} (1,6 \cdot 10^7 t - 6,0 \cdot 10^9 t^2) \vec{i} dt$$

es decir

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt &= \left[\frac{1}{2} 1,6 \cdot 10^7 t^2 - \frac{1}{3} 6,0 \cdot 10^9 t^3 \right]_0^{2,5 \cdot 10^{-3}} \vec{i} \\ &= 18,75 \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

b) El impulso del peso $\vec{P} = m\vec{g}$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \vec{P} dt &= \vec{P} \int_{t_1}^{t_2} dt = \vec{P} \Delta t \\ &= -(0,145 \cdot 9,8) \vec{j} \cdot 2,5 \cdot 10^{-3} = -3,55 \cdot 10^{-3} \vec{j} \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

c) Teniendo en cuenta la ecuación (7), podemos escribir

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{neta} dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} + \vec{P}) dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

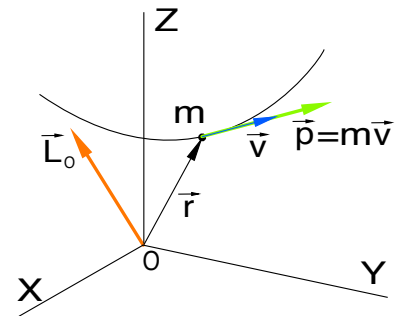
Por lo tanto

$$18,75 \vec{i} - 3,55 \cdot 10^{-3} \vec{j} = \vec{p}_2 + 0,145 (40,0 \vec{i} + 5,0 \vec{j})$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{p}_2}{m} = 89,3 \vec{i} - 5,0 \vec{j} \text{ m/s}$$

4. Momento angular. Teorema de conservación.

Supongamos una partícula de masa m que se mueve con una velocidad \vec{v} respecto a un sistema de referencia fijo con origen en O , y sea $\vec{p} = m\vec{v}$ su momento lineal.



Se define **momento cinético** o **momento angular** respecto al punto fijo O , como el momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto

$$\vec{L}_o = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad (8)$$

Las unidades del momento cinético no tienen nombre concreto, siendo en el SI $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$.

Derivemos la expresión (8) respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (9)$$

El primer sumando puede expresarse

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0 \quad (10)$$

y si tenemos en cuenta el teorema del momento lineal dado por la ecuación (5), podremos escribir para el segundo sumando

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad (11)$$

donde \vec{F} representa la fuerza neta que actúa sobre la partícula.

Recordando la definición del momento de un vector respecto a un punto, el término $\vec{r} \wedge \vec{F}$ representa el momento respecto a O , \vec{M}_O , de la fuerza neta que actúa sobre la partícula, y por lo tanto

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O \quad (12)$$

Sustituyendo los resultados dados por las expresiones (10) y (12) en la ecuación (9), obtenemos finalmente

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \quad (13)$$

expresión que se conoce como **teorema del momento cinético** o **teorema del momento angular** y que establece que *la derivada respecto al tiempo del momento cinético de la partícula calculado respecto a un punto fijo O , es igual al momento de la fuerza neta que actúa sobre la partícula respecto al mismo punto.*

Si en la expresión (13) hacemos $\vec{M}_O = 0$

$$\vec{M}_O = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_O = cte \quad (14)$$

resultado que se conoce como **teorema de conservación del momento cinético**: *si el momento de la fuerza neta respecto a O es nulo entonces su momento cinético, relativo al mismo punto, es constante.*

Cuando se verifique que $\vec{L}_O = cte$ (deben conservarse su módulo, dirección y sentido) entonces el plano determinado por los vectores \vec{r} y \vec{v} (perpendicular al vector \vec{L}_O) es fijo, y por consiguiente la trayectoria de la partícula deberá ser plana.

El efecto del momento de la fuerza neta \vec{M}_O sobre el momento cinético \vec{L}_O durante un período de tiempo finito puede obtenerse integrando la ecuación (13) entre dos instantes t_1 y t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O dt = \int_{\vec{L}_1}^{\vec{L}_2} d\vec{L}_O$$

Al producto del momento por el tiempo durante el que está actuando se le denomina **impulso angular**

$$\vec{I}_A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_o dt = \vec{L}_{o2} - \vec{L}_{o1} \quad (15)$$

el impulso angular recibido por la partícula es igual a la variación de su momento cinético entre ambos instantes.

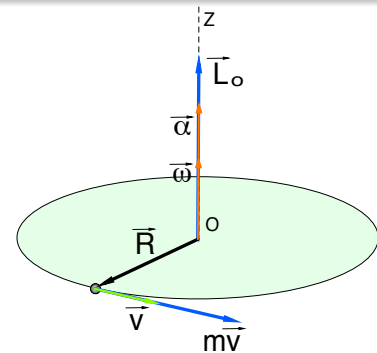
Ejemplo 4

Analizar el movimiento circular de centro O, radio R y velocidad angular ω , realizado por una partícula de masa m.

Hagamos coincidir el eje Z con el eje de la circunferencia que describe la partícula.

En este caso

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$$



Dado que la cantidad de movimiento de la partículas es $\vec{p} = m\vec{v}$, el momento cinético respecto al punto O vendrá dado por

$$\vec{L}_o = \vec{R} \wedge m\vec{v} = mRv\vec{k}$$

Pero como

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{R} \quad \Rightarrow \quad v = \omega R$$

llegamos a que

$$\vec{L}_o = mR^2\omega \vec{k} = mR^2\vec{\omega} = I \vec{\omega}$$

denominándose a $I = mR^2$ momento de inercia de la partícula respecto al eje de giro.

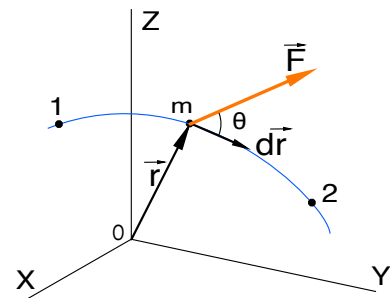
Derivando respecto al tiempo la ecuación anterior y teniendo en cuenta el teorema del momento cinético, resulta

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = I \vec{\alpha} = \vec{R} \wedge \vec{F} = \vec{M}_o$$

5. Trabajo y energía mecánica. Teorema de conservación.

Consideremos una partícula de masa m que se mueve, siguiendo una trayectoria cualquiera, debido a la acción de una fuerza \vec{F} .

La posición de la partícula viene dada por el vector de posición \vec{r} y su desplazamiento a lo largo de la trayectoria durante el tiempo dt está representado por el vector desplazamiento $d\vec{r}$.



El **trabajo elemental**, dW , realizado por la fuerza \vec{F} para desplazar la partícula $d\vec{r}$, viene dado por

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (16)$$

El **trabajo total** realizado por la fuerza al desplazar su punto de aplicación desde una posición 1, hasta otra 2, será

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (17)$$

Esta integral podrá realizarse si se conoce la ecuación de la trayectoria, lo que va a permitir relacionar la fuerza con el desplazamiento.

En el Sistema Internacional la unidad de trabajo se denomina joule (J), y equivale a $J = N \cdot m$.

El trabajo realizado en la unidad de tiempo se denomina **potencia**

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (18)$$

La unidad de potencia en el SI es el *watt* (W), de forma que $W = J/s$.

La expresión (18) puede escribirse en función de la velocidad sin más que tener en cuenta la expresión de dW

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (19)$$

Vamos a obtener ahora una forma alternativa de expresar el trabajo. De la ecuación (19), resulta

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = m \vec{a} \cdot \vec{v} dt = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

Por otro lado teniendo en cuenta que

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

llevando este resultado a la ecuación anterior, nos queda

$$dW = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \frac{1}{2} m \frac{d(v^2)}{dt} dt = \frac{1}{2} m d(v^2)$$

Si integramos la ecuación anterior entre la posición 1 en el que la partícula posee una velocidad v_1 y la posición 2 en la que la velocidad es v_2

$$\int_1^2 dW = \frac{1}{2} m \int_{v_1}^{v_2} d(v^2)$$

es decir

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (20)$$

Al escalar

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad (21)$$

se le denomina **energía cinética** de la partícula.

Por lo tanto, la ecuación (20) puede escribirse de la forma

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{c2} - E_{c1} \quad (22)$$

expresión que se conoce como **teorema de la energía cinética** o **teorema de las fuerzas vivas**.

La ecuación (22) pone de manifiesto que *el trabajo total efectuado por la fuerza neta que actúa sobre una partícula durante un intervalo de su movimiento es igual a la correspondiente variación de su energía cinética.*

- Trabajo en campos conservativos

Supongamos que en una región del espacio existe un campo de fuerzas conservativo, es decir

$$\vec{F} = -\text{grad}E_p \quad (23)$$

donde E_p representa la función potencial de la que deriva la fuerza y que denominaremos *energía potencial*.

El trabajo en este caso vendrá dado por

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 \text{grad}E_p \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 dE_p \\ &= E_{p1} - E_{p2} \end{aligned} \quad (24)$$

que es independiente del camino seguido entre ambos puntos.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (22) y (24), podemos escribir

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2}$$

reagrupando términos

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} \quad (25)$$

A la suma de la energía cinética más la energía potencial se le denomina *energía mecánica*, $E = E_c + E_p$. Por consiguiente

$$E_1 = E_2 \quad (26)$$

expresión que constituye el *teorema de conservación de la energía mecánica*: cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas, su energía mecánica permanece constante.

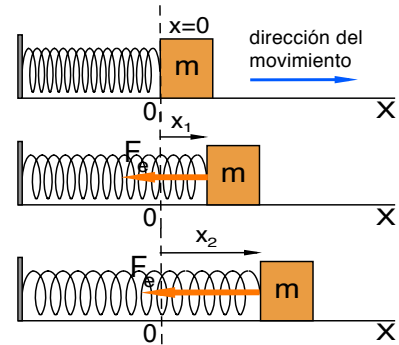
Ejemplo 5

Un resorte tiene un extremo fijo mientras que el otro extremo está unido a un cuerpo de masa m que puede moverse a lo largo del eje X . Si la fuerza que ejerce el resorte es proporcional a su alargamiento ¿cuánto trabajo realiza la fuerza elástica al pasar de una posición x_1 a otra posición x_2 ?

En la figura se muestra la masa m unida al resorte.

Cuando $x=0$, el resorte no ejerce fuerza sobre la masa (posición de equilibrio).

Al desplazarse la masa en el sentido positivo del eje X , el resorte se estira una distancia x de forma que la fuerza elástica en ese momento será $\vec{F} = -kx\vec{i}$.



El trabajo realizado por la fuerza elástica al pasar de la posición x_1 a la x_2 , será

$$W_{1 \rightarrow 2} = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2 = E_{p1} - E_{p2}$$

- Trabajo en campos no conservativos

Cuando en una región existen fuerzas no conservativas, el teorema de conservación de la energía mecánica dado por la ecuación (26) deja de verificarse.

Para abordar el problema desde un punto de vista general, vamos a suponer que en esa región existen simultáneamente tanto fuerzas conservativas, \vec{F}_c , como fuerzas no conservativas, \vec{F}_n .

Teniendo en cuenta la expresión (22) podemos escribir

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_c + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = E_{c2} - E_{c1}$$

Ahora bien, para las fuerzas conservativas $\vec{F}_c = -\text{grad}E_p$, y como ya hemos visto, la integral

$$\int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = E_{p1} - E_{p2}$$

corresponde a la variación de energía potencial.

Para las fuerzas no conservativas deberemos evaluar la integral correspondiente en cada situación particular. Sea $W_{1 \rightarrow 2}^n$ el valor de esta integral

$$W_{1 \rightarrow 2}^n = \int_1^2 \vec{F}_n \cdot d\vec{r}$$

Por lo tanto

$$W_{1 \rightarrow 2} = E_{p1} - E_{p2} + W_{1 \rightarrow 2}^n = E_{c2} - E_{c1}$$

Agrupando términos

$$E_{c1} + E_{p1} + W_{1 \rightarrow 2}^n = E_{c2} + E_{p2} \quad (27)$$

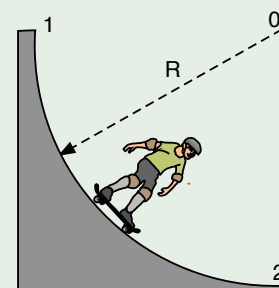
Si sobre la partícula actúa alguna fuerza disipativa que transforma la energía mecánica en otro tipo de energía, la energía mecánica no se conserva

$$E_1 + W_{1 \rightarrow 2}^n = E_2 \quad (28)$$

la ecuación (27) expresa la conservación de energía en el caso de que existan fuerzas no conservativas.

Ejemplo 6

Un patinador de 25,0 kg describe un cuarto de circunferencia de radio $R=3,0$ m, como se muestra en la figura. Sabiendo que parte del reposo en la parte más alta, 1, y que en la parte más baja, 2, lleva una velocidad de 6,0 m/s averiguar cual es el trabajo realizado por las fuerzas de fricción.



De acuerdo con la ecuación (27), tendremos

$$E_{c1} + E_{p1} + W_{fric} = E_{c2} + E_{p2}$$

En el punto 1 el patinador se encuentra en reposo: $v_1 = 0$ y $E_{c1} = 0$. Tomando como referencia de energías potenciales el punto 2: $E_{p2} = 0$

Por lo tanto

$$mgR + W_{fric} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

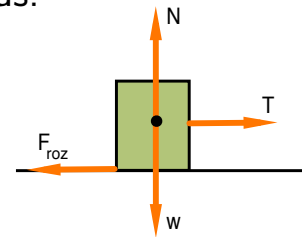
de donde

$$\begin{aligned}W_{fric} &= \frac{1}{2}mv_2^2 - mgR \\ &= \frac{1}{2} \cdot 25,0 \cdot 6,0^2 - 25,0 \cdot 9,8 \cdot 3,0 = -285 \text{ J}\end{aligned}$$

6. Rozamiento.

Si dos superficies están en contacto y tratamos de deslizar una sobre otra, aparecen entre ellas unas fuerzas tangentes a las superficies en contacto que se denominan **fuerzas de rozamiento al deslizamiento** y que pueden ser explicadas en base a interacciones electromagnéticas.

Consideremos un cuerpo en reposo sobre un plano horizontal en el que se apoya. Apliquémosle una fuerza horizontal T no muy intensa de forma que el estado de reposo permanezca.



Esto significa que simultáneamente con la fuerza que hemos aplicado, T , actúa otra fuerza igual y opuesta, F_{roz} .

Al rozamiento de un cuerpo sobre la superficie de otro en ausencia de movimiento se le denomina **rozamiento estático**.

Si vamos aumentando gradualmente T también lo irá haciendo en la misma medida la fuerza de rozamiento estática hasta que ésta alcanza un valor máximo (*estado de deslizamiento inminente*), a partir del cual el cuerpo empieza a deslizar.

Esta **fuerza de rozamiento estático máxima** es proporcional a la fuerza normal N

$$F_{s \text{ máx}} = \mu_s N \quad (29)$$

donde μ_s es el **coeficiente de rozamiento estático**.

Una vez se produce el deslizamiento, la fuerza de rozamiento disminuye ligera pero bruscamente hasta un valor F_k , denominada **fuerza de rozamiento dinámico** que también resulta ser proporcional a la fuerza normal

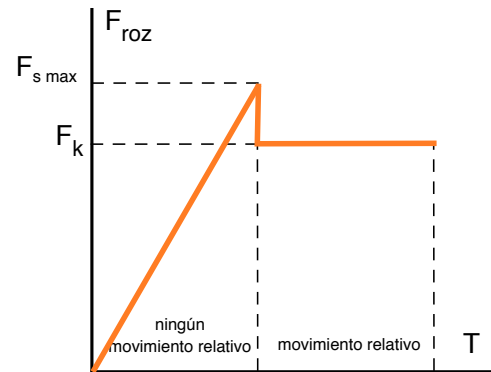
$$F_k = \mu_k N \quad (30)$$

siendo μ_k el denominado **coeficiente de rozamiento dinámico**.

Experimentalmente se encuentra que:

- ▶ La fuerza de rozamiento dinámico es constante para cada par de superficies en contacto.
- ▶ El coeficiente de rozamiento dinámico es siempre menor que el coeficiente de rozamiento estático, $\mu_k < \mu_s$.
- ▶ La fuerza de rozamiento no depende del valor del área de contacto entre los cuerpos que rozan.

En la figura se pone de manifiesto el comportamiento expuesto anteriormente. En respuesta a una fuerza aplicada T , la fuerza de rozamiento estático aumenta desde cero hasta un valor máximo $F_{s\text{máx}}$. Luego las superficies comienzan a deslizarse y la fuerza de fricción disminuye bruscamente hasta un valor constante F_k .

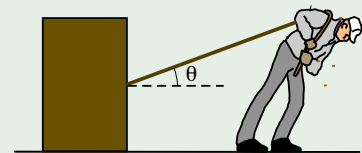


Como las fuerzas de rozamiento por deslizamiento tienen el sentido opuesto al del movimiento del cuerpo sobre el que actúan, el trabajo que realizan dichas fuerzas de rozamiento es siempre negativo.

El trabajo de rozamiento representa la energía disipada en forma de calor y siempre produce una disminución de la energía mecánica del cuerpo.

Ejemplo 7

Una caja de 400 N se desplaza a velocidad constante sobre un piso horizontal al aplicarle una fuerza \vec{F} que forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_k = 0,25$. Calcular el ángulo θ que hace que la fuerza F necesaria sea lo más pequeña posible y evalúe también dicha fuerza.



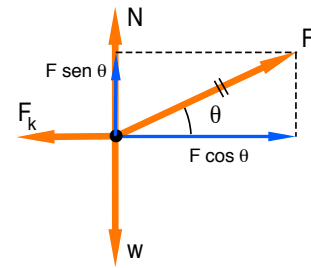
En primer lugar construimos el diagrama de cuerpo libre para analizar las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Como en la dirección vertical no hay movimiento

$$N + F \operatorname{sen} \theta - w = 0$$

En la dirección horizontal la caja se mueve con velocidad constante, y por lo tanto $a=0$

$$F \cos \theta - F_k = ma = 0$$



Despejamos N de la primera de las ecuaciones y calculamos la fuerza de rozamiento

$$N = w - F \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad F_k = \mu_k N = \mu_k (w - F \operatorname{sen} \theta)$$

Por lo tanto

$$F \cos \theta - \mu_k (w - F \operatorname{sen} \theta) = 0$$

Agrupando términos

$$F(\cos \theta + \mu_k \operatorname{sen} \theta) = \mu_k w$$

de donde

$$F = \frac{\mu_k w}{\cos \theta + \mu_k \operatorname{sen} \theta}$$

Para calcular el ángulo θ para el cual la fuerza ejercida F es la más pequeña posible procederemos de la siguiente forma

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{\mu_k w (-\operatorname{sen} \theta + \mu_k \cos \theta)}{(\cos \theta + \mu_k \operatorname{sen} \theta)^2} = 0$$

Es decir

$$-\operatorname{sen} \theta + \mu_k \cos \theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \theta = \mu_k$$

Sustituyendo valores

$$\operatorname{tg} \theta = 0,25 \quad \Rightarrow \quad \theta = 14^\circ$$

y

$$F = \frac{0,25 \cdot 400}{\cos 14 + 0,25 \cdot \operatorname{sen} 14} = 103 \text{ N}$$